第４講　三角関数の合成（応用編）

4　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(\theta)=\sin\theta+a\cos\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．ただし，a は実数の定数とする．

(2)　関数 $f(\theta)=(\sqrt{3}-1)\sin\theta+(\sqrt{3}+1)\cos\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

(3)　関数 $f(\theta)=8\cos^3\theta+4\sin^3\theta-6\cos\theta-3\sin\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　三角関数の合成（応用編）

4　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき関数 $f(x)=2x\sqrt{1-x^2}+x^2-1$ のとり得る値の範囲を求めよ.

【選択肢】

㋐　$-1 \leqq f(x) \leqq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　㋑　$-1 \leqq f(x) < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　㋒　$-1 < f(x) \leqq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　三角関数の合成（応用編）

4　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(\theta)=\sin\theta+a\cos\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．ただし，a は実数の定数とする．

(2)　関数 $f(\theta)=(\sqrt{3}-1)\sin\theta+(\sqrt{3}+1)\cos\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

(3)　関数 $f(\theta)=8\cos^3\theta+4\sin^3\theta-6\cos\theta-3\sin\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

【答】 (1) 最大値 $\begin{cases}\sqrt{1+a^2} & (a \geqq 0)\\ 1 & (a<0)\end{cases}$，最小値 $\begin{cases} a & (a \leqq 1)\\ 1 & (a>1)\end{cases}$

(2) 最大値 $2\sqrt{2}$，最小値 $\sqrt{3}-1$　　(3) 最大値 2，最小値 $-\sqrt{5}$

【解答】

(1)　$f(\theta)=\sqrt{1+a^2}\sin(\theta+\beta)$　（ただし，β は $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\tan\beta=a$ を満たす実数）

ここで $\beta \leqq \theta+\beta \leqq \dfrac{\pi}{2}+\beta$ であるから，

$a \geqq 0$ のとき，$\theta+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\beta$ において**最大値 $\sqrt{1+a^2}$** をとり，

$a<0$ のとき，$\theta+\beta=\dfrac{\pi}{2}+\beta$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ において**最大値 1** をとる．

また，**$a \leqq 1$ のとき**，$\theta+\beta=\beta$ すなわち $\theta=0$ において**最小値 a** をとり，

$a>1$ のとき，$\theta+\beta=\dfrac{\pi}{2}+\beta$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ において**最小値 1** をとる．

(2)　$f(\theta)=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{5}{12}\pi\right)$ であり $\dfrac{5}{12}\pi \leqq \theta+\dfrac{5}{12}\pi \leqq \dfrac{11}{12}\pi$ であるので，

$\theta+\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ において**最大値 $2\sqrt{2}$** をとり，

$\theta+\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{11}{12}\pi$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ において**最小値 $\sqrt{3}-1$** をとる．

(3)　$f(\theta)=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-(3\sin\theta-4\sin^3\theta)=-\sin3\theta+2\cos3\theta$ より

$f(\theta)=\sqrt{5}\sin(3\theta+\alpha)$　（ただし，α は $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ かつ $\tan\alpha=-2$ を満たす実数）と表せるので，

$3\theta+\alpha=\alpha$ すなわち $\theta=0$ において**最大値 2** をとり，

$3\theta+\alpha=\dfrac{3}{2}\pi$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{3}$ において**最小値 $-\sqrt{5}$** をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　三角関数の合成（応用編）

4　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき関数 $f(x)=2x\sqrt{1-x^2}+x^2-1$ のとり得る値の範囲を求めよ．

【選択肢】

㋐　$-1 \leqq f(x) \leqq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　㋑　$-1 \leqq f(x) < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　㋒　$-1 < f(x) \leqq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

【答】 ㋐

【解答】

条件 $0 \leqq x \leqq 1$ より，$x=\cos\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2\cos\theta\sqrt{1-\cos^2\theta}+\cos^2\theta-1 \\
&= 2\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta \\
&= \sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

このとき $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}\right)$ を満たす実数 α を用いて

$$
f(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2\theta+\alpha)-\frac{1}{2}
$$

と表せるので，

$$
\alpha \leqq 2\theta+\alpha \leqq \pi+\alpha
$$

に注意すると，$2\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}$ において最大値 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ をとり，

$2\theta+\alpha=\pi+\alpha$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ において $f(x)$ は最小値 -1 をとる．

$f(x)$ は連続であるから，$f(x)$ のとり得る値の範囲は

$$
\boldsymbol{-1 \leqq f(x) \leqq \frac{\sqrt{5}-1}{2}}
$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。